数理解析研究所講究録
第 1799 巻 2012 年 183-186

トリックテイキングゲームの計算量と必勝戦略

中井 健一朗*　　　武永 康彦†

1 はじめに

計算理論において、ある問題を解くためにかかる時間量や領域量を明らかにし、その複雑さを調べることは重要である。扱われる問題は数多くあり、パズルやゲームもその中の1つである。広く知られている古典的なパズルやゲームを一般化することで定式化して計算問題として扱いやすい形にし、その計算量が調べられている。

一方で、こうした問題を解くアルゴリズムや計算量のクラスが解明されていないものも多くある。本研究では 66[1] と呼ばれるトリックテイキングゲームを取り上げ、その計算量と必勝戦略について研究を行う。

2 一般化 66 とその計算量

トリックテイキングゲームは、トランプを初めとするカードゲームの、遊び方の一分類である。

トリックテイキングゲームの計算量と必勝戦略を扱った研究では二人用の1スートのホイストについて必勝性とその必勝戦略が証明されている [2]。

本研究ではカードに得点があり、それを集める二人用のトリックテイキングゲームをモデル化し取り扱う。以下のようなトリックテイキングゲームを一般化 66 と呼ぶ。

カードの集合は $C=\{r|1\leq r\leq 2n\}$ とする。ただし $1\leq r\leq 2n$ をカードの強さを表す値とし、数値が大きいカードのほうが強いものとする。

お互いの手札の枚数を $h(2\leq h\leq n)$ と表す。$t(0\leq t\leq n)$ トリック目のプレーヤAとプレーヤBの手札をそれぞれ $HA=\{a_1,a_2,\ldots,a_h\}$ 、$HB=\{b_1,b_2,\ldots,b_h\}$、$t$ トリック目の先手を $e\in\{A,B\}$ とし、t トリック目の山札は $D:\{1,2,\ldots,2(n-h-t+1)\}\rightarrow C$ とする。カードにはそれぞれ得点が実数の範囲内で決まっており、トリックで獲得したカードはプレーヤごとの得点となる。これを $Q:C\rightarrow R$ とし、ゲームに勝利するために獲得しなければならない得点を $TP\in R$、各プレーヤの t トリック時点での得点を PA,PB とする。

つまり、ゲームの状態は $G=\langle C,D,Q,TP,t,e,HA,HB,PA,PB\rangle$ と表す事が出来る。

一般化 66 は同じ枚数の手札が配られた後、次の手順を繰り返すことで進行し、どちらかの得点が TP を超えるとそのプレーヤの勝利でゲームは終了する。

1. 先手が1枚リードし、後手が1枚出す。(これをトリックと呼ぶ)
2. 強いカードを出したプレーヤが今回のトリックで使用された2枚のカードを得点として獲得する。
3. 山札があるならトリックの勝者、敗者の順で山札から一枚引き手札に加える。
4. トリックを獲得したプレーヤが次のトリックの先手となる。

ここで、一般化 66 問題を次のように定義する。

入力 一般化 66 の局面 G

出力 G に対して、プレーヤAは必勝戦略を持つか?

定理 1 互いの手札が定数枚、カードの得点が高々 n の多項式で抑えられているなら一般化 66 問題はクラスPに所属する。

証明 一般化 66 においてプレーヤがカードを1枚出すごとにゲームの局面がどのように変化するかを無閉路有向グラフによって表現する。

一般化 66 の局面の総数は、山札、互いの手札、互いの得点によって決まる。入力として与えられる局面 G には互いの手札、山札の状態、得点などが含まれているため、山札の順番や相手の手札を知ることができる。また、山札はゲームの進行に合わせて2枚ずつ順番に使用され、合計 n トリックで山札を含む全てのカード $2n$ 枚が使用される。そのため、山札の取りうる状態の総数は高々$2n$ 通りである。また、あるトリックにおけるプレーヤ1人の手札の組み合わせは高々n^h 通りであり、互いの得点は高々多項式通りである。以上より、ある与えられた局面を与えたとき、その局面からゲームの進行に従って取りうる局面の総数は多項式で抑えられる。

さらに、ゲームは局面が先手の手番であるか後手の手番であるかに応じて、それぞれ全称状態、存在状態で表現が可能である。

ゲームは最終的にAかBの勝利で終わるため、多項式時間での探索が可能である。 □

*電気通信大学大学院情報理工学研究科情報・通信工学専攻
†第1著者に同じ

3 山札のカード取得

本章では山札の中にある特定のカード 1 枚を手札に入れることが出来るかを判定する方法を示し、特殊な場合の必勝性について示す。手札に加えたいカードが山札の中の $g(1 < g < 2(n-h-t+1)$ 番目のカード $D(g)$ とし、f トリック目の結果によってその勝者、あるいは敗者の手札に加えられるものとする。

補題 1 g が奇数の時、f トリック目において A と B の手札の中で最も強いカードを持つプレーヤーは $D(g)$ を手札に加えることが出来る。

補題 2 g が偶数の時、f トリック目において A と B の手札の中で最も弱いカードを持つプレーヤーは $D(g)$ を手札に加えることが出来る。

補題 1、補題 2 より次のアルゴリズムを用いることである特定のカードを手札に加えることが出来るかを判定することが可能である。

山札探索のアルゴリズム
入力：g
出力：A は $D(g)$ を手札に加えることが出来るか

1. $TARGET \leftarrow g$
2. $TARGET$ が奇数なら 2 へ、偶数なら 3 へ
3. A と B の手札と $D(e)(1 \leq e \leq g-1)$ の中で最も強いカードを調べる。A の手札にあれば 5 へ、B の手札にあれば 6 へ、e ならば $TARGET \leftarrow e$ として 2 へ
4. A と B の手札と $D(e)(1 \leq e \leq g-2)$ の中で最も弱いカードを調べる。A の手札にあれば 6 へ、B の手札にあれば 5 へ、e ならば $TARGET \leftarrow e$ として 2 へ
5. A は目的のカードを手札に加えられる
6. A は目的のカードを手札に加えられない

このアルゴリズムはステップ 2 及び 3 を高々n 回繰り返せば完了するため、アルゴリズム全体の計算量は $O(n^2)$ である。

また、得点となるカードが 1 枚だけである時そのカードを q とすると、次の必勝性が示せる。

補題 3 q が $f+1$ トリック目までに山札から引かれるカードと、A と B の手札にあるカード全ての中で最も強いカードなら、q を手札に加えたプレーヤーは必勝である。

補題 4 q が全てのカードの中で最も弱いカードなら、q を手札に加えたプレーヤーは必敗である。

4 2人トリックテイキングゲーム終盤の解析

本章では山札が切れた状態で、得点となるカードが 1 枚だけであるときの一般化 66 問題の解法を示す。

一般性を失わずに、得点となるカード q は $q \in HA$、つまり A の手札に存在するものと仮定する。

q を $HA \cup HB$ のうち i 番目に弱いカード、w_a, w_b をそれぞれ HA, HB のなかの q よりも弱いカードの枚数、$a(k), b(k)$ を q を除く $HA \cup HB$ の中の k 番目に弱いカード以下の強さのカードのうち A のカードの枚数及び B のカードの枚数、$v(k)$ を $a(k)-b(k)$ とする。

このとき、$a(k)-(b(k)+w_b) = v(k)+w_b$ は A の持つ q を除いた k 以下の強さのカードの枚数から B の持つ q よりも強く k 以下の強さのカードの枚数を引いたものとする。

また、j を B の持つ q よりも弱いカードの中で 2 番目に強いカード、l を B の持つ 2 番目に強いカードとする。k はゲームの局面ごとに変化はしないが、j 及び l はゲームの局面に応じて変化するものとする。

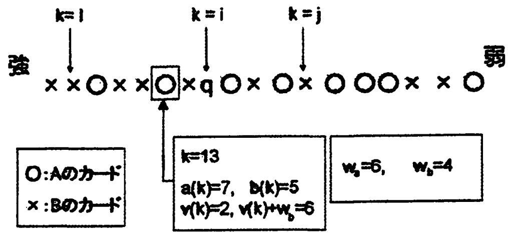

図 1: 盤面の例

$v(k)$ はトリックが進むにつれて次のように変化する性質がある。

事実 1 トリックに使用された 2 枚のカードの間の強さのカード全ての $v(k)$ は、A がそのトリックに勝利した場合は 1 増え、A が負けた場合は 1 減る。

また w_b は B の q よりも弱いカードが使用されたときに減少するため、この性質とあわせ $k > i$ の範囲の $v(k)+w_b$ の値は次のように変化する。

事実 2 A が q よりも強いカードを出し、B が q よりも弱いカードを出した場合、A の出したカードより強いカード全ての $v(k)+w_b$ の値は 1 減少する。また、B が q よりも強いカードを出し、A が q よりも弱いカードを出した場合、q よりも強く A の出したカードよりも弱いカードの $v(k)+w_b$ の値は 1 減少する。

事実 3 A と B がともに q よりも弱いカードを出した場合、q よりも強いカード全ての $v(k)+w_b$ の値は 1 減少する。

事実 4 AとBがともにqよりも強いカードを出した場合、トリックで使用されたカードの間の強さのカード全ての $v(k)+w_b$ の値が、Bがトリックに勝利した場合は1減少し、Aがトリックに勝利した場合は1増加する。

また、AとBは次のストラテジーを基本的には用いる。

***A*のストラテジー** Aが先手の時は弱い順にカードを使用する。Bが先手の時は $w_b-a(k)\geq 0$ のカードの中で $v(k)$ が最大となるカードよりも強いカードでトリックに負けられる場合はそのカードのうち最も強いカードを使用し、そうでなければ最も強いカードを使用する。

***B*のストラテジー** Aが先手の時はトリックに負けれる時は負けられるカードでかつqよりも弱いカードの中で最も強いカードを使用し、そうでなければqよりも弱いカードのうち最も強いカードを使用する。Bが先手の時はqよりも強いカードを弱い順に使用する

このストラテジーでは、両者は可能な限り先手を相手に取らせ、相手の出したカードを見て対応できる後手に回ることを目的としている。さらに、Bは可能な限り w_b の値を減らすことでゲームを有利に運ぶことも目的としている。

次に示す三つの補題ではBの手札によっていずれかのプレーヤーの必勝が定まる場合を示している。

定理 2 Bの手札が全てqよりも強ければBは必勝である。Bの手札が全てqよりも弱ければAは必勝である。

補題 5 Bが先手の時、定理2の条件を満たさず、Bの手札にqよりも強いカードが1枚しかないならばAは必勝である

補題 6 A先手の時、定理2の条件を満たさず、Bの手札にqよりも弱いカードが1枚しかないならばBは必勝である

次に示す4つの定理はA先手、B先手の時のAとBの必勝性を示すものである。また補題7、補題8は定理5、定理6を導くために使用する。

定理 3 B先手の時、定理2の条件を満たさず、

$$\forall l \geq k \geq i+1 \quad v(k)+w_b \geq 0 \tag{1}$$

を満たすならAは必勝である。

証明 Bがqよりも弱いカードを出した時、Aはqを出すことでqを含むトリックを獲得しゲームに勝利する。

また、$v(k)+w_b\leq 0$ はAの持つ k より弱いカードの枚数がBの持つ $i+1$ より強く k よりも弱いカードの枚数より多い事を表す。つまり、条件式1より、AはBの出したカードよりも弱いカードを1枚以上持っている事になる。よって、Bがqよりも強いカードを出した時は、Aはそのカードよりも弱いカードのうち最も強いカードを使いトリックに負ける事で、次のトリックもBを先手にすることができる。この場合、Bがトリックに勝った後も $l\geq k\geq i+1$ の範囲の $v(k)+w_b$ は0以上の値をとり続ける。そのためAはトリックに負け続け、最終的にBが $i+1$ より強いカードが1枚となり、補題5を満たしAは必勝となる。 □

r を $v(k)=1$ となる最小のAのカード以下のAのカードの数とする。

定理 4 A先手の時、ある $k(1<k<j)$ に対して $v(k)>0$ であり、$l\geq k\geq i+1$ の範囲で $v(k)+w_b$ の最小値が r 以上ならばAは必勝である。

証明 AとBがストラテジー通りにプレイをするとき、AがBに先手を渡すまでに行うトリック数は r 回である。Bがストラテジー通りにプレイをすると、Bに先手が移るまでに $v(k)+w_b$ は r だけ減少するが、AがBに先手を渡した時に条件式1を満たしているため定理3よりAは必勝である。Bがストラテジー通りの行動をとらない場合は、r 回以下のトリックでBに先手を渡せるため、$v(k)+w_b$ の最小値は減少しても0以上となり定理3よりAは必勝となる。 □

補題 7 Bがストラテジー通りにプレイをした場合、A先手の時に $v(k)\leq 0(1<k<j)$ か、ある $k(l\geq k\geq i+1)$ について $v(k)+w_b<r$ ならば、B先手に移ったときにBのカードが全てqよりも強いカードであるか、ある $k(l\geq k\geq i+1)$ に対して $v(k)+w_b<0$ である。

証明 Bがストラテジー通りにプレイをすると、Bはqよりも弱いカードがある限り、必ずqよりも弱いカードを使用するため1トリックにつき w_b が1づつ減少していく。

Aがトリックに勝つなら使用された2枚のカードの間の強さのカードの $v(k)$ は1増加するため、トリックで使用されたカードの間の強さのカードの $v(k)+w_b$ は変化せず、その範囲外のカードの $v(k)+w_b$ は1減少する。また、Bがトリックに勝つなら、Aはqよりも弱いカードを使用しているため $l\geq k\geq i+1$ の範囲の $v(k)+w_b$ は1減少し、Bに先手が移る。

Aがストラテジー通りにプレイををした場合、r 回のトリックでBに先手が移り、$v(k)+w_b$ は r だけ減少する。$l\geq k\geq i+1$ の範囲の $v(k)+w_b$ の最小値は

r 未満であるため、$l \geq k \geq i+1$ の範囲の $v(k)+w_b$ の最小値は負となる。このとき、r は 1 トリックごとに 1 ずつ減少していく。また、A がストラテジー通りのプレイをしない場合はそのトリックでは r は変化しないが、前述の通り $v(k)+w_b$ の値は最大で 1 減少しているため、B に先手が移るまでにさらに r トリック以上が費やされることを考えれば $l \geq k \geq i+1$ の範囲の $v(k)+w_b$ の最小値は負となる。また、B が使用するカードによっては j の位置が変化することで k の範囲が狭まり、$v(k) < 0(1 < k < j)$ となる可能性がある。この場合、B はトリックに負け続けることが出来るようになり、q よりも弱いカードを使いきり B のカードが全て q よりも強いカードとなる。□

補題 8 B がストラテジー通りにプレイをした場合、ある $k(l \geq k \geq i+1)$ に対して $v(k)+w_b < 0$ であるなら、A 先手に移っても $v(k) \leq 0(1 < k < j)$ か、ある $k(l \geq k \geq i+1)$ について $v(k)+w_b < r$ である。

証明 B がストラテジー通りにプレイをすると、B は q よりも弱いカードを使用しないため w_b は変化しない。

A がトリックに負け続ける間、トリックに使用されたカードの間の強さのカードの $v(k)$ は 1 減少する。A がトリックに勝つとき、トリックに使用されたカードの間の強さのカードの $v(k)$ は 1 増加し、A に先手が移る。B から A に先手が移る際に $v(k)+w_b$ は 1 増加する事があり、それ以外のトリックでは変化しないか減少するだけなので、B が先手の間には、$l \geq k \geq i+1$ の範囲の $v(k)+w_b$ は最大 1 増加する。

また、B の $k=l$ のカードを出す場合、l の位置が変化する。B は q よりも強いカードの中で弱い順にカードを使用するため、$k=l$ のカードを出した後は B の持つ q よりも強いカードは 1 枚だけとなり、k の範囲がなくなる。この場合、B の出したカードは $k(l \geq k \geq i+1)$ に対して $v(k)+w_b < 0$ であるため、$v(l)+w_b = a(l)-b(l)+w_b < 0$。ここで、B は l 以下のカードの中で q よりも強いカードは l のみであるため $b(l)-w_b = 1$ となり、先ほどの式より $a(l) < 1$、つまり $a(l) = 0$ であり B の持つカードは最も強い 1 枚を除き全て A の持つカードより弱い。このトリックによって A に先手が移り、以降は A が q を出した時には最も強いカードで勝利し、それ以外のカードを出した場合はトリックに負けることで B は必勝となる。

$k(l \geq k \geq i+1)$ に対して $v(k)+w_b < 0$ であるなら、A 先手に移った際に $l \geq k \geq i+1$ の範囲の $v(k)+w_b$ は高々0 である。r は正の整数であることは明らかなので、$k(l \geq k \geq i+1)$ に対して $v(k)+w_b < 0$ であるなら、A 先手に移っても条件を満たす。□

定理 5 A が先手の時に、$v(k) \leq 0(1 < k < j)$ か、ある $k(l \geq k \geq i+1)$ について $v(k)+w_b < r$ ならば B は必勝である。

証明 A が先手のときに、$k < j$ の範囲で $v(k)$ の最大値が 0 以下であった場合、A は B に先手を渡すことが出来なくなる。この時、B は先手を取らないように、q よりも弱いカードを全て使い切り定理 2 より B は必勝である。また、補題 7、補題 8 より A が先手の時にある $k(l \geq k \geq i+1)$ について $v(k)+w_b < r$ ならば、定理 3、定理 4 の条件が満たされることはない。そのため、何度 B に先手が渡されても B は A に先手を渡すことができ、最終的に q よりも弱いカードを全て使い切り定理 2 より B は必勝である。□

定理 6 B が先手の時にある $k(l \geq k \geq i+1)$ に対して $v(k)+w_b < 0$ ならば B は必勝である。

証明 B 先手の時、ある $k(l \geq k \geq i+1)$ に対して $v(k)+w_b < 0$ であるということは、B の持つ i 以上 k 以下の強さのカードの枚数が、A の持つ k 以下の強さのカードの枚数よりも多いことを示している。つまり、B はストラテジー通りにプレイすることで、A に先手を渡すことが必ず出来ることを意味している。

また、補題 8 より B が先手の時にある $k(l \geq k \geq i+1)$ に対して $v(k)+w_b < 0$ ならば、A に先手を渡した時に $v(k) \leq 0(1 < k < j)$ か、ある $k(l \geq k \geq i+1)$ について $v(k)+w_b < r$ となるため定理 5 より B は必勝となる。□

5 おわりに

本研究では一般化された 66 についてその計算量を明らかにし、得点となるカードが 1 枚のみの状態でに山札の存在する時の特殊な場合の必勝性と、山札のなくなった時の各プレーヤーの必勝性を示した。今後の課題としては、山札の存在する状態での必勝性の完全な解明、得点となるカードが複数存在する場合についての必勝性の解明があげられる。また、ハーツ [1] に代表されるカードに失点がついたルールへの応用などが挙げられる。

参考文献

[1] ゲームファーム, http://www.gamefarm.jp.

[2] Johan Wastlund, A solution of two-person single-suit whist. *The Electronic Journal of Combinatorics,* 12:1-32, 2005.